

Partie I - Analyse Système

**I.A- Questions préliminaires**

I.A.1) Déterminer la distance maximale que peut parcourir le Segway® entre deux recharges des batteries. Justifier la pertinence de ce moyen de transport

Chaque moteur peut délivrer « un travail moyen » égal à  $W_{mot-1} = W_{mot-2} = \eta \cdot E_b / 2 = 0.8MJ$

L'application du théorème de l'énergie cinétique sous sa forme intégrée permet d'écrire :

$$W_{mot-1} + W_{mot-2} + W_{résistant} = 0 .$$

Avec  $W_{résistant} = -60 \cdot d$  (d distance parcourue)

$$\text{On en déduit : } d = \frac{\eta \cdot E_b}{60} \quad \text{A.N. } d = \frac{0,8 \cdot 2 \cdot 10^6}{60} = 26,6 \cdot 10^3 m = 26,6 km$$

Le Segway® est destiné à un usage urbain, donc usage sur de courtes distances. L'autonomie peut-être jugée suffisante.

I.A.2) Rappeler en quelques lignes le principe de fonctionnement d'un codeur incrémental. Citer aussi un autre moyen d'acquisition d'une vitesse de rotation.

Principe: Le codeur incrémental permet de compter ou décompter les impulsions d'un signal générées par le déplacement d'un mobile dans le but de contrôler son déplacement. L'exploitation d'un second signal déphasé de 90° du premier permet de déterminer le sens de rotation.

Deux types de codeur incrémentaux :

- codeurs incrémentaux optiques
- codeurs incrémentaux magnétiques

La génératrice tachymétrique permet de mesurer une vitesse de rotation.

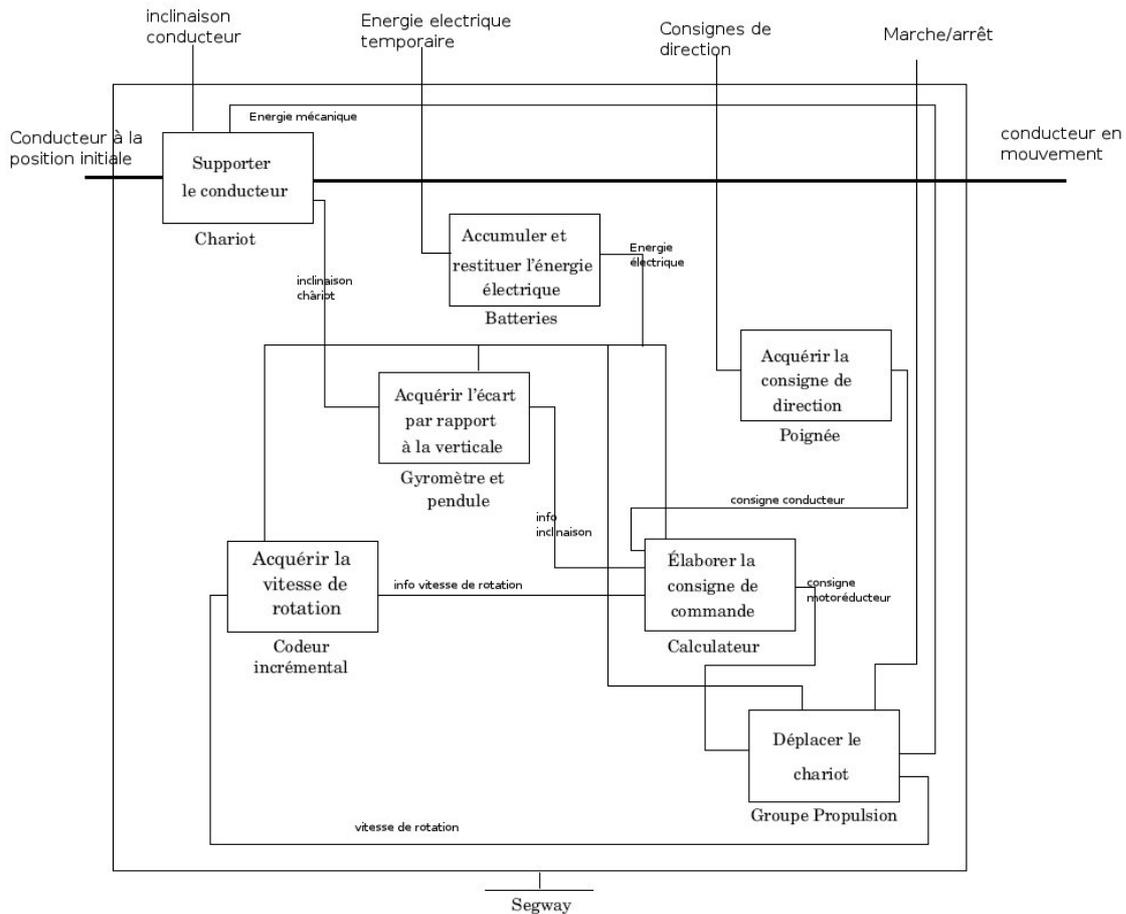
I.A.3) Rappeler quelle est la grandeur physique mesurée par un gyromètre mécanique et le principe de la mesure associée.

Lorsqu'un gyroscope est soumis à une rotation (ou un moment) imposée, il réagit en créant un couple gyroscopique qui va annuler un moment.

La grandeur mesurée est une vitesse de rotation.

## I.B- Etude système

I.B.1) Compléter le SADT de niveau A0 proposé dans le document réponse.

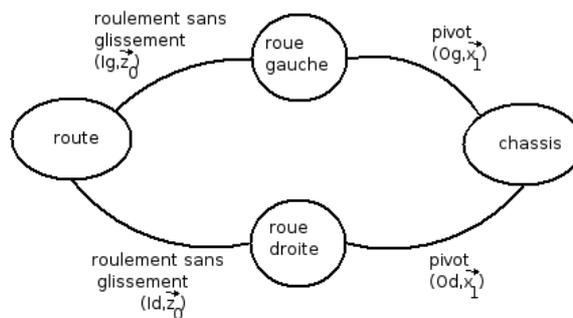


## Partie II - Modèle de comportement mécanique

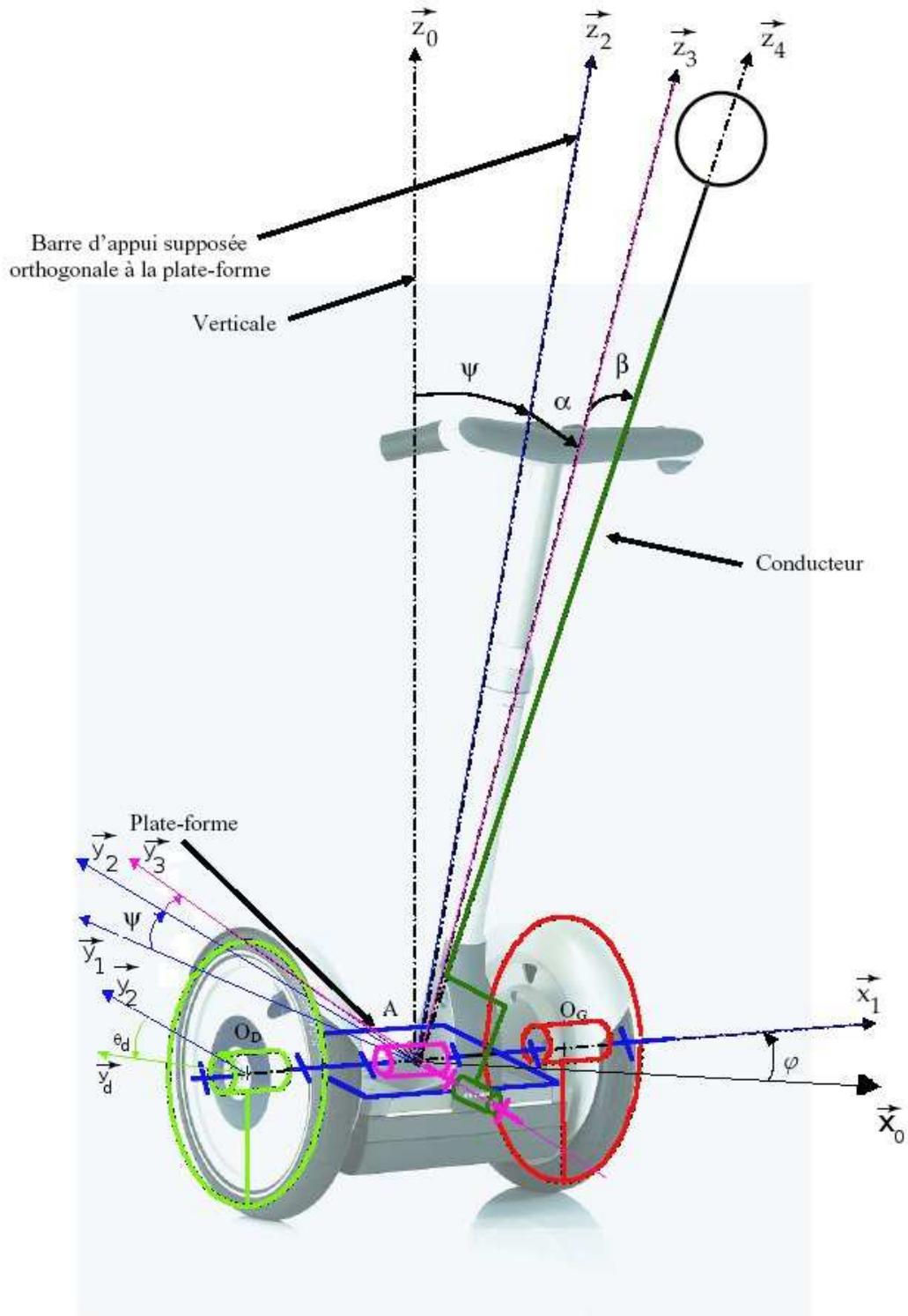
### II.A- Modèle et paramétrage

### II.B- Etude cinématique préalable

II.B.1) Proposer un graphe des liaisons du système restreint à l'ensemble de solides {Route, Roue Gauche, roue Droite, Châssis}. Préciser pour chaque liaison ses caractéristiques géométriques.



II.B.2) En s'appuyant sur le paramétrage et en utilisant de la couleur, proposer un schéma cinématique du système {Roue Gauche, Roue Droite, Plate-forme, Conducteur}, en complétant l'épure du document réponse (ne pas schématiser le contact roue/route).



II.B.3) Exprimer, en fonction du paramétrage, les torseurs cinématiques :

- du châssis par rapport au sol :  $\{V(2/0)\}$ , en notant  $\vec{V}(A \in 2/0) = U\vec{x}_1 + V\vec{y}_1$ ,
- de la roue droite par rapport au châssis :  $\{V(R_D/2)\}$ ,
- de la roue gauche par rapport au châssis :  $\{V(R_G/2)\}$

$$- \vec{\Omega}(2/0) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\psi}\vec{x}_1 + \dot{\phi}\vec{z}_0 \text{ soit } \{V(2/0)\} \equiv \begin{matrix} \dot{\psi}\vec{x}_1 + \dot{\phi}\vec{z}_0 \\ U\vec{x}_1 + V\vec{y}_1 \end{matrix}$$

$$- \{V(R_D/2)\} \equiv \begin{matrix} \dot{\theta}_D\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \text{ et } \{V(R_G/2)\} \equiv \begin{matrix} \dot{\theta}_G\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{matrix}$$

II.B.4) Énoncer ensuite les deux relations de roulement sans glissement des roues par rapport à la route et déterminer trois relations scalaires liant les 6 paramètres inconnus  $\dot{\psi}, \dot{\phi}, \dot{\theta}_D, \dot{\theta}_G, U, V$  aux dimensions L et R. Ces relations seront utilisées dans l'étude dynamique.

Etude de la roue droite :

$$\begin{aligned} \vec{V}(I_D, R_D/0) = \vec{0} &= \vec{V}(I_D, R_D/2) + \vec{V}(I_D, 2/0) \\ &= \vec{I}_D \vec{O}_D \wedge \dot{\theta}_D \vec{x}_1 + \vec{I}_D \vec{A} \wedge (\dot{\psi}\vec{x}_1 + \dot{\phi}\vec{z}_0) + U\vec{x}_1 + V\vec{y}_1 \\ &= R\dot{\theta}_D(\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1) + R\dot{\psi}(\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1) + \frac{L}{2}\dot{\phi}(\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_0) + U\vec{x}_1 + V\vec{y}_1 \end{aligned}$$

en projection sur  $\vec{x}_1$  :  $U=0$

$$\text{en projection sur } \vec{y}_1 : R(\dot{\theta}_D + \dot{\psi}) - \frac{L}{2}\dot{\phi} + V = 0$$

Etude de la roue gauche :

En projection sur  $\vec{x}_1$  :  $U=0$

$$\text{en projection sur } \vec{y}_1 : R(\dot{\theta}_G + \dot{\psi}) + \frac{L}{2}\dot{\phi} + V = 0$$

## II.C- Étude de la transmission de puissance

II.C.1) Une voiture ne possède généralement qu'un seul moteur et qu'un seul réducteur (la boîte de vitesses). Le différentiel permet de répartir la puissance motrice sur les deux roues motrices. Expliquer pourquoi le constructeur du Segway® n'a pas adopté cette solution.

Ici les actionneurs sont des moteurs électriques dont le coût est peu élevé contrairement au moteur d'un véhicule automobile classique. Il est plus simple et plus économique de motoriser indépendamment chaque roue pour assurer la fonction de direction (les 2 roues ne tournant pas à la même vitesse).

II.C.2) Proposer, sur le document réponse, une architecture du réducteur s'intégrant dans le carter et dont le rapport de

$$\text{réduction vaut } |k_r| = \frac{1}{24} \text{ en dessinant une épure de la solution adoptée.}$$

Pour obtenir le rapport  $k_r$ , une solution simple consiste à mettre en place un train d'engrenage constitué de deux engrenements de rapport respectif  $1/6$  et  $1/4$ . Sachant que  $Z_{\min} = 15$  dents (soit  $d_{\min} = 15 \text{ mm}$ ), on choisit :

- pour le premier engrenement :  $Z_e = 15$ ,  $Z_2 = 90$   $Z_e$  : nombre de dents de l'arbre d'entrée

- pour le second engrenement :  $Z_{2'} = 15$ ,  $Z_s = 60$   $Z_s$  : nombre de dents de l'arbre d'entrée

avec  $Z_2$  et  $Z_{2'}$  nombre de dents des roues de l'axe intermédiaire.

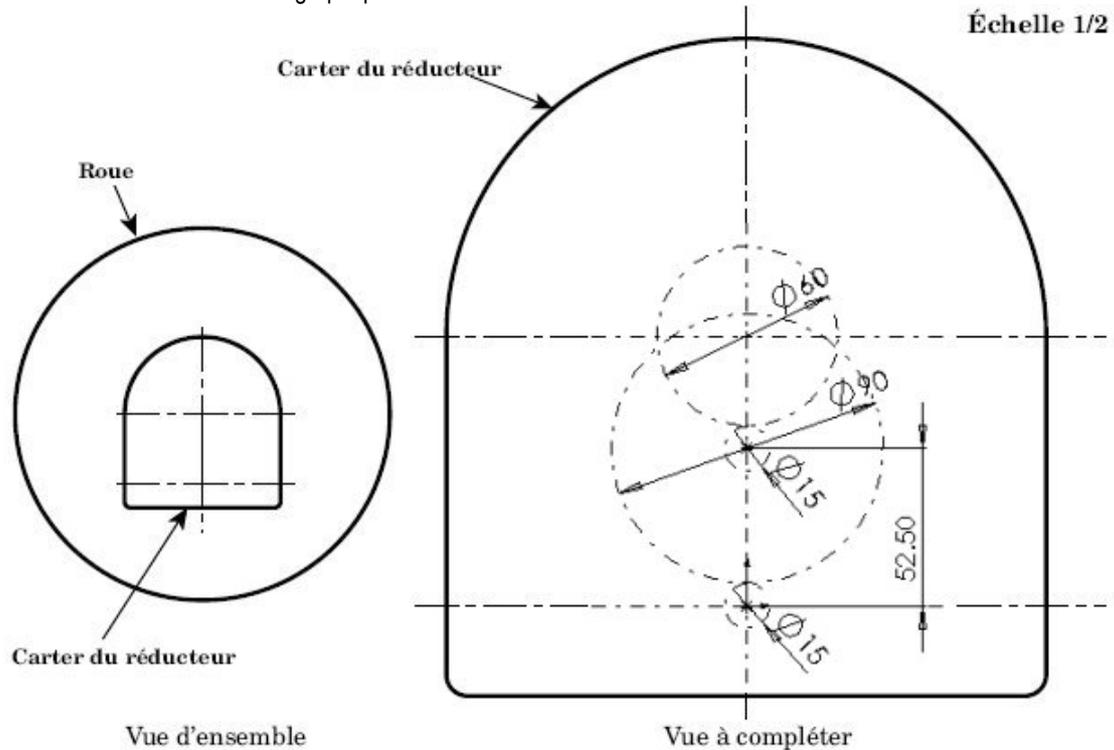
Il reste à régler la position de l'axe de la roue 2. Ceci se fait par un calcul d'entraxe :

$$\Delta_2 = m \frac{Z_e + Z_2}{2} = 52,5 \text{ mm}$$

$$\Delta_{2'} = m \frac{Z_s + Z_{2'}}{2} = 37,5 \text{ mm}$$

On remarque :  $\Delta_2 + \Delta_{2'} = 90 = OO_M$

On en déduit alors la construction graphique suivante :



### Partie III - Validation de la FS4

#### III.A- III.A - Analyse du modèle de calcul des actions mécaniques

III.A.1) En s'appuyant sur le graphe des liaisons de la question II.B.1, déterminer le nombre de mobilités du système {Route, Roue Gauche, Roue Droite, Châssis}. En déduire alors le degré d'hyperstatisme du mécanisme.

Nombre de cycle 1 :  $E_c = 6$

Nombre d'inconnues cinématiques :  $I_c = 2 * 1 + 2 * 3 = 8$  (les liaisons roulements sans glissement possèdent 3 inconnues cinématiques chacune, les rotations)

Nombre de mobilités :

- le système possède 3 mobilités cinématiques  $V, \varphi, \psi$

Soit :  $m_c = 3$

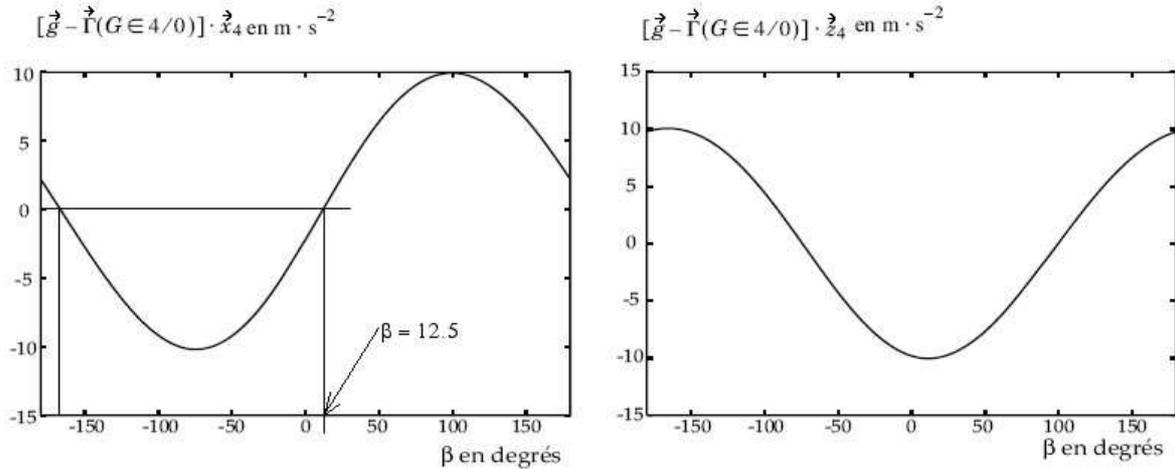
On en déduit :  $h = E_c - I_c + m_c = 1$

### III.B- Détermination de l'inclinaison du conducteur en virage

III.B.1) Par un tracé sur le document réponse, justifié sur la copie, donner alors la valeur de  $\beta$  qui permet de vérifier la condition exposée ci-dessus.

On veut  $\vec{g} - \vec{\Gamma}(G \in 4/0)$  colinéaire à  $\vec{z}_4$ .

Il faut donc que  $[\vec{g} - \vec{\Gamma}(G \in 4/0)] \cdot \vec{x}_4 = 0$ . Le tracé nous donne deux possibilités, une seule est acceptable au vu du paramétrage :  $\beta = 12,5^\circ$



### III.C- Étude dynamique simplifiée du Segway® en virage

III.C.1) Faire le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures qui s'exercent sur ce système.

On isole le système {Conducteur, Châssis, Roue Droite, Roue Gauche}.  
Le bilan des actions mécaniques exercées sur le système est le suivant :

$$- \{T_{(roue \rightarrow R_G)}\}, \{T_{(roue \rightarrow R_D)}\}$$

$$- \{T_{(pesanteur \rightarrow conducteur)}\} \equiv_G \begin{Bmatrix} -m_H g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}, \{T_{(pesanteur \rightarrow chassis)}\} \equiv_A \begin{Bmatrix} -m_S g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

III.C.2) Expliquer pourquoi le système d'équations obtenu ne permet pas de déterminer toutes les inconnues d'effort et recenser celles qui ne peuvent pas être calculées sans hypothèse complémentaire. Expliquer l'origine de cette impossibilité.

Les inconnues  $Y_d, Y_g$  peuvent être calculées à partir des équations issues du PFD de la résultante suivant  $\vec{y}_1$  et du moment suivant  $\vec{z}_0$ . On peut déterminer les inconnues  $Z_g, Z_d$  à partir des équations 2 et 3 données dans l'énoncé. Il reste donc les inconnues  $X_g, X_d$  pour une seule équation disponible. On retrouve ici le degré d'hyperstatisme égal à 1 déterminé à la question III.A.1

III.C.3) Énoncer les lois de Coulomb en utilisant les notations du III.A pour une roue, dans les cas d'adhérence et de glissement.

#### Cas du glissement

Dans ce cas, le modèle associé à la liaison roue gauche/sol est une liaison ponctuelle  $(I_g, z)$  réelle (introduction du frottement)

Posons  $\vec{R}_{(route \rightarrow R_G)} = \vec{N}_G + \vec{T}_G$  (résultante des actions mécaniques de la route sur la roue gauche avec  $\vec{N}_G$  composante normale et  $\vec{T}_G$  composante tangentielle)

Lois de Coulomb :

$$\vec{T}_G \wedge \vec{V}(I_G \in R_G / route) = \vec{0} \Rightarrow \vec{T}_G = X_G \vec{x}_1 + Y_G \vec{y}_1$$

$$\vec{T}_G \cdot \vec{V}(I_G \in R_G / route) < 0$$

et

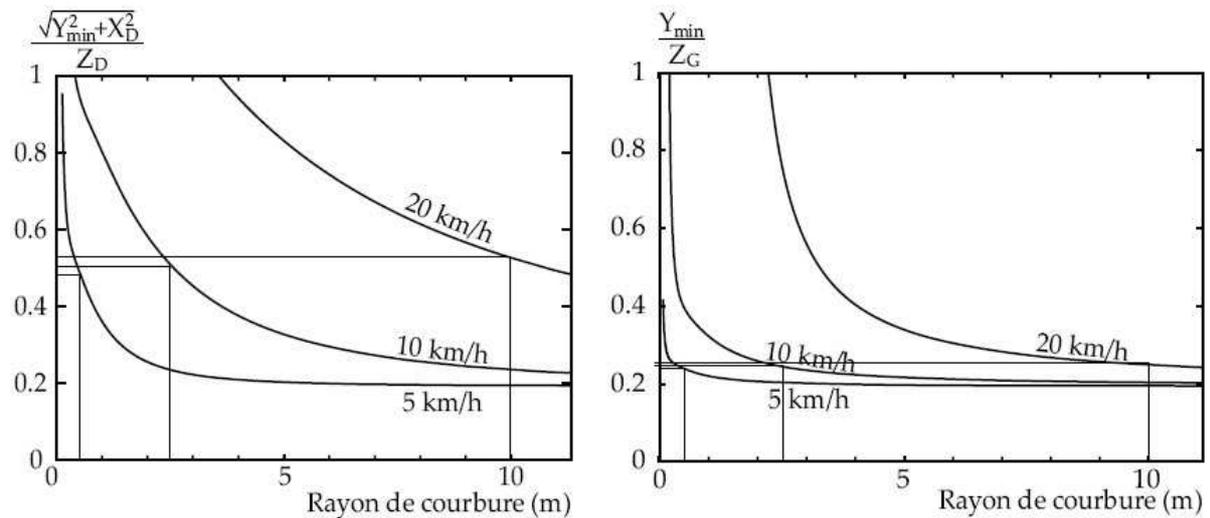
$$|T_G| = f |N_G| \Rightarrow \sqrt{X_G^2 + Y_G^2} = f Z_G$$

**cas de l'adhérence :**

On revient au modèle roulement sans glissement. Après résolution du système, la composante tangentielle doit vérifier la relation suivante pour que le modèle soit validé.

$$|T_G| < f |N_G| \Rightarrow \sqrt{X_G^2 + Y_G^2} < f Z_G \quad (3)$$

III.C.4) En expliquant votre démarche et en complétant le document réponse, vérifier les performances attendues vis-à-vis des rayons de virage minimums tout en garantissant les critères de non basculement et de non dérapage.



On vérifie sur les courbes ci-dessus :

- $Z_G > 0, Z_D > 0$ , la condition de non basculement est respectée.
- Pour chaque vitesse et chaque rayon minimum admissible on vérifie pour la roue droite et la roue gauche :

$$- \frac{\sqrt{Y_{\min}^2 + X_D^2}}{Z_D} < f$$

$$- \frac{Y_{\min}}{Z_G} < f$$

ce qui nous assure d'un non dérapage des roues par rapport au sol (cas de l'adhérence).

### IV.A- Détermination des équations mécaniques régissant le système

IV.A.1) Justifier l'hypothèse de problème plan du point de vue des efforts.

Les torseurs des roues par rapport au sol sont de la forme  $\{T_{(roue \rightarrow R_i)}\} \equiv \begin{Bmatrix} X_i \bar{x}_1 + Z_i \bar{z}_0 \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_{I_i}$

Les torseurs dus à la pesanteur sont de la forme  $\{T_{(pesanteur \rightarrow S_i)}\} \equiv \begin{Bmatrix} -m_i g \bar{z}_0 \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_{G_i}$

Les torseurs dynamiques de chaque solide en mouvement par rapport à la route sont de la forme  $\begin{Bmatrix} \bar{R}_D(S_i / 0) \\ \bar{\delta}_A(S_i / 0) \end{Bmatrix}_A$ , avec

$\bar{R}_D(S_i / 0) \cdot \bar{x}_1 = 0$  déplacement en ligne droite suivant  $\bar{y}_1$

et  $\bar{\delta}_A(S_i / 0) \cdot \bar{z}_0 = 0$  et  $\bar{\delta}_A(S_i / 0) \cdot \bar{y}_1 = 0$  toutes les rotations sont autour de  $\bar{x}_1$  et déplacement suivant  $\bar{y}_1$

On en déduit alors (par isolement de chacune des roues) que les torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les

liaisons pivots roue/sol sont de la forme  $\begin{Bmatrix} Y \bar{y}_1 + Z \bar{z}_0 \\ L \bar{x}_1 \end{Bmatrix}_{O_i}$ .

L'hypothèse est donc justifiée.

IV.A.2) Déterminer pour chaque solide (Conducteur, Châssis, Roue Gauche et Roue Droite) dans leur mouvement par rapport au repère galiléen  $R_0$  :

- Calcul des projections des résultantes dynamiques suivant  $\bar{y}_1$

le conducteur :

$$\bar{R}_D(H / 0) \cdot \bar{y}_1 = m_H \bar{\Gamma}(G \in H / 0) \cdot \bar{y}_1$$

$$\begin{aligned} \bar{V}(G \in H / 0) &= \bar{V}(G \in 2 / 0) = \bar{V}(A \in 2 / 0) + \overline{GA} \wedge \bar{\Omega}(2 / 0) \quad \text{avec } V = -R(\dot{\theta} + \dot{\psi}) \\ &= V \bar{y}_1 - h \dot{\psi} \bar{y}_3 \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \bar{R}_D(H / 0) \cdot \bar{y}_1 = m_H [V - h \dot{\psi} \cos(\alpha + \psi) + h \dot{\psi}^2 \sin(\alpha + \psi)]$$

le châssis :

$$\bar{R}_D(S / 0) \cdot \bar{y}_1 = m_S \bar{\Gamma}(A \in S / 0) \cdot \bar{y}_1 = m_S V$$

la roue droite (roue gauche)

$$\bar{R}_D(R_D / 0) \cdot \bar{y}_1 = m_R \bar{\Gamma}(O_D \in R_D / 0) \cdot \bar{y}_1 = m_R \bar{\Gamma}(A \in R_D / 0) \cdot \bar{y}_1 = m_R V \quad (\text{relation identique pour la roue gauche})$$

- Calcul des projections des moments dynamiques suivant  $\bar{x}_1$

le conducteur :

$$\bar{\delta}_A(H / 0) \cdot \bar{x}_1 = \frac{d(\bar{\sigma}_G(H / 0) \cdot \bar{x}_1)}{dt} + m_H (\overline{AG} \wedge \bar{\Gamma}(G \in H / 0)) \cdot \bar{x}_1$$

$$\frac{d(\bar{\sigma}_G(H / 0) \cdot \bar{x}_1)}{dt} = A_H \ddot{\psi}$$

$$\begin{aligned} m_H (\overline{AG} \wedge \bar{\Gamma}(G \in H / 0)) \cdot \bar{x}_1 &= m_H h (\bar{z}_3 \wedge (\dot{V} \bar{y}_1 - h \dot{\psi} \bar{y}_3 - h \dot{\psi}^2 \bar{z}_3)) \cdot \bar{x}_1 \\ &= m_H (h^2 \ddot{\psi} - h \dot{V} \cos(\alpha + \psi)) \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \bar{\delta}_A(H / 0) \cdot \bar{x}_1 = (A_H + m_H h^2) \ddot{\psi} - m_H h \dot{V} \cos(\alpha + \psi)$$

le châssis :

$$\bar{\delta}_A(S/0) \cdot \bar{x}_1 = \frac{d(\bar{\sigma}_A(S/0) \cdot \bar{x}_1)}{dt} = A_S \ddot{\psi}$$

la roue droite (roue gauche)

$$\bar{\delta}_A(R_D/0) \cdot \bar{x}_1 = \frac{d(\bar{\sigma}_A(R_D/0) \cdot \bar{x}_1)}{dt} = A_R (\ddot{\psi} + \ddot{\theta}) \quad (\text{relation identique pour la roue gauche})$$

IV.A.3) En exposant la séquence d'isolement et en appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique, montrer que l'on peut obtenir le système de deux équations suivant :

$$\begin{cases} (m_H h^2 + A_H + A_S) \ddot{\psi} - m_H h \dot{V} \cos(\alpha + \Psi) = m_H h g \sin(\alpha + \Psi) - 2C_S \\ (m_S + m_H + 2m_R) \dot{V} - m_H h \ddot{\psi} \cos(\alpha + \Psi) + m_H h \dot{\psi}^2 \sin(\alpha + \Psi) = -2 \frac{A_R}{R^2} \dot{V} - 2 \frac{C_S}{R} \end{cases}$$

On isole l'ensemble E={châssis + conducteur}

Théorème du moment dynamique appliqué à E en A en projection sur  $\bar{x}_1$

$$\begin{aligned} \bar{M}_A(\text{pesanteur} \rightarrow H) \cdot \bar{x}_1 + \underbrace{\bar{M}_A(\text{pesanteur} \rightarrow S) \cdot \bar{x}_1}_0 \\ + \underbrace{\bar{M}_A(R_D \rightarrow S) \cdot \bar{x}_1}_0 + \underbrace{\bar{M}_A(R_G \rightarrow S) \cdot \bar{x}_1}_0 + 2 * \bar{M}_A(\text{motoréducteur} \rightarrow S) \cdot \bar{x}_1 = \bar{\delta}_A(H + S/0) \cdot \bar{x}_1 \end{aligned}$$

$$(A_H + A_S + m_H h^2) \ddot{\psi} - m_H h \dot{V} \cos(\alpha + \psi) = m_H h g \sin(\alpha + \psi) - 2C_S$$

On isole la roue droite

Théorème du moment dynamique appliqué à la roue droite en A en projection sur  $\bar{x}_1$

$$\underbrace{\bar{M}_A(S \rightarrow R_D) \cdot \bar{x}_1}_0 + \bar{M}_A(\text{motoréducteur} \rightarrow R_D) \cdot \bar{x}_1 + \bar{M}_A(\text{roue} \rightarrow R_D) \cdot \bar{x}_1 = \bar{\delta}_A(R_D/0) \cdot \bar{x}_1$$

$$R Y_D + C_S = A_R (\ddot{\psi} + \ddot{\theta}) = -A_R \frac{\dot{V}}{R}$$

$$\text{Soit : } Y_D = -\frac{C_S}{R} - A_R \frac{\dot{V}}{R^2}$$

On isole enfin l'ensemble E={châssis + conducteur+roue droite + roue gauche}

Théorème de la résultante dynamique appliqué E en projection sur  $\bar{y}_1$

$$2Y_D = \bar{R}_D(E/0) \cdot \bar{y}_1 = (m_H + m_S + 2m_R) \dot{V} - m_H h \ddot{\psi} \cos(\alpha + \psi) + m_H h \dot{\psi}^2 \sin(\alpha + \psi)$$

(Les 2 roues ont un comportement identiques)

$$\text{Soit : } (m_H + m_S + 2m_R) \dot{V} - m_H h \ddot{\psi} \cos(\alpha + \psi) + m_H h \dot{\psi}^2 \sin(\alpha + \psi) = -2 \frac{C_S}{R} - 2A_R \frac{\dot{V}}{R^2}$$

IV.A.4) Énoncer les hypothèses qui permettent d'envisager de linéariser le système précédent. Sous ces hypothèses, montrer alors que le système linéarisé peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} A \ddot{\psi}(t) - B \dot{V}(t) = -2C_S(t) + C(\alpha(t) + \Psi(t)) \\ B \ddot{\psi}(t) - D \dot{V}(t) = \frac{2C_S(t)}{R} \end{cases}$$

En prenant les hypothèses suivantes

$$\sin(\alpha + \psi) = \alpha + \psi \quad \text{et les termes en } \dot{\psi}^2 \text{ négligeable devant ceux en } \dot{\psi}$$

$$\cos(\alpha + \psi) = 1$$

On en déduit :

$$A = A_H + A_S + m_H h^2 \quad B = m_H h \quad C = m_H h g$$

$$D = m_H + m_s + 2m_R + 2 \frac{A_R}{R^2}$$

A.N. :  $A = 18 + 0,8 + 80.0,95^2 = 91 \text{kg.m}^2$      $B = 80.0,95 = 76 \text{kg.m}$   
 $C = 80.0,95.9,81 = 745,5 \text{ N.m}$      $D = 80 + 25 + 10 + 2.0,28 / 0,24^2 = 124,7 \text{kg}$

#### IV.B- Relation entre l'inclinaison du conducteur et l'accélération du Segway®

IV.B.1) Montrer que cette relation s'écrit sous la forme  $\dot{V} = K\alpha(t)$  où vous préciserez la valeur numérique de K.

L'asservissement est considéré comme parfaitement réalisé donc  $\psi$  et ses dérivées par rapport au temps sont nuls.

En combinant les deux équations précédentes on détermine la relation suivante :

$$\left(-\frac{B}{R} - D\right)\dot{V} = \frac{C}{R}\alpha(t) \text{ soit } \dot{V} = -\frac{C}{(B + D.R)}\alpha(t) \text{ et } K = -\frac{C}{(B + DR)} \text{ A.N. :}$$

$$K = \frac{-745,5}{76 + 124,7.0,24} = -7 \text{m.s}^{-2} / \text{rad}$$

IV.B.2) Vérifier les performances attendues du cahier des charges en vous appuyant sur les configurations proposées figure 6.

Si  $\alpha = 0$  alors  $\dot{V} = 0$  vitesse constante

Si  $\alpha = 22$  alors l'accélération normale (déccélération) est de  $2,68 \text{m.s}^{-2}$  (cahier des charges respecté)

Calcul de la distance d'arrêt maxi

Soit a la déccélération maxi  $a = -7.45.\pi/180 = 5,5 \text{ m/s}^{-2}$

Soit t le temps pour passer de 20km/h à 0  $t = V/a$ ,  $t = \frac{20}{3,6.5,5} \approx 1 \text{s}$

On en déduit la distance d'arrêt maxi  $x = \frac{1}{2}at^2$  soit  $x = 5,5 / 2 = 2,75 \text{m}$  (cahier des charges respecté)

#### Partie V - Validation de la FS2 et de la FS3

##### V.A- Stabilisation du système

V.A.1) Montrer que le schéma bloc du système peut se mettre sous la forme présentée figure 7 en déterminant l'expression littérale de  $H_1(p)$ .

Analyser la stabilité du système d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $\psi(t)$  en étudiant la fonction de transfert

$$F_1(p) = \frac{\Psi(p)}{U(p)}. \text{ Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?}$$

Les conditions initiales sont toutes nulles . On obtient à partir de la seconde équation différentielle dans Laplace, l'équation suivante :

$$[(DA - B^2)p^2 - DC]\chi(p) = 2\left(\frac{B}{R} + D\right)C_m(p) *$$

$$\text{On en déduit } H_1(p) = \frac{2\left(\frac{B+DR}{RDC}\right)}{\left(\frac{DA-B^2}{DC}\right)p^2 - 1} \text{ puis } F_1(p) = K_m \frac{2\left(\frac{B+DR}{RDC}\right)}{\left(\frac{DA-B^2}{DC}\right)p^2 - 1}$$

Le schéma bloc se justifie alors en écrivant :

$$\Psi(p) = \chi(p) - \alpha(p) = F_1(p)U(p) - \alpha(p)$$

Le système d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $\psi(t)$  est instable car le dénominateur de la fonction de transfert possède un

pôle réel positif.  $p_i = \pm \sqrt{\frac{DC}{DA-B^2}}$  avec  $\frac{DA-B^2}{DC} = 6.10^{-2} > 0$

Ce résultat était prévisible du fait que le centre d'inertie du système est situé au dessus de l'axe des roues.

V.A.2) Dans le cas où  $\alpha = 0$ , déterminer, en fonction de  $K_s$ ,  $k_p$ ,  $k_v$  et  $\omega_1$  la fonction de

$$\text{transfert } F_2(p) = \frac{\Psi(p)}{W(p)}.$$

Déterminer les conditions sur  $k_v$  et sur  $k_p$  pour que le système soit stable.

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(p)}{W(p)} &= \frac{\frac{K_m H_1(p)}{1 + pk_v K_m H_1(p)}}{1 + k_p \frac{K_m H_1(p)}{1 + pk_v K_m H_1(p)}} = \frac{K_m H_1(p)}{1 + pk_v K_m H_1(p) + k_p K_m H_1(p)} \\ &= \frac{K_s}{\frac{p^2}{\omega_1^2} + pk_v K_s + k_p K_s - 1} \end{aligned}$$

Un système de degré 2 est stable si les coefficients des puissances de p sont différents de 0 et sont de même signe (vu en physique sur les boucles de rétroaction).

Ceci implique :

$$kp > \frac{1}{K_s} \text{ et } k_v > 0 \text{ pour que le système soit stable.}$$

V.A.3) Déterminer, en fonction de  $K_s$ ,  $k_p$ ,  $k_v$  et  $\omega_1$  les expressions de  $K_2$ ,  $\xi$ ,  $\omega_0$

$$\begin{aligned} F_2(p) &= \frac{\frac{K_s}{k_p K_s - 1}}{\frac{p^2}{(k_p K_s - 1)\omega_1^2} + \frac{pk_v K_s}{k_p K_s - 1} + 1} \text{ soit :} \\ K_2 &= \frac{K_s}{k_p K_s - 1}, \quad \omega_0 = \sqrt{(k_p K_s - 1)}\omega_1, \quad \xi = \frac{1}{2} \frac{k_v K_s \omega_1}{\sqrt{k_p K_s - 1}} \end{aligned}$$

V.A.4) Déterminer les valeurs de  $k_v$  et de  $k_p$  telles que le temps de réponse à 5% soit minimal.

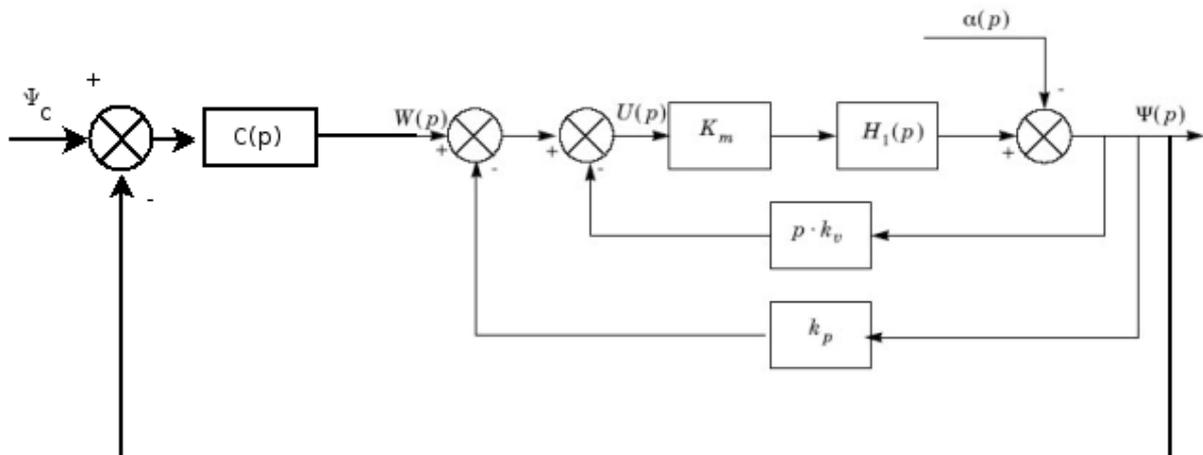
Pour un système du second ordre, le temps de réponse à 5% est minimal si  $\xi = \sqrt{2} / 2$ .

On en déduit pour  $\omega_0 = 1,5\omega_1$  :

$$\begin{aligned} k_p &= (1,5^2 + 1) / K_s = 13,54 \text{ V / rad} \\ k_v &= 2\xi \frac{\sqrt{k_p K_s - 1}}{K_s \omega_1} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{13,54 \cdot 0,24 - 1}}{0,24 \cdot 4,1} = 2,15 \text{ V.rad}^{-1}.s \\ K_2 &\approx 0.1 \text{ rad / V} \end{aligned}$$

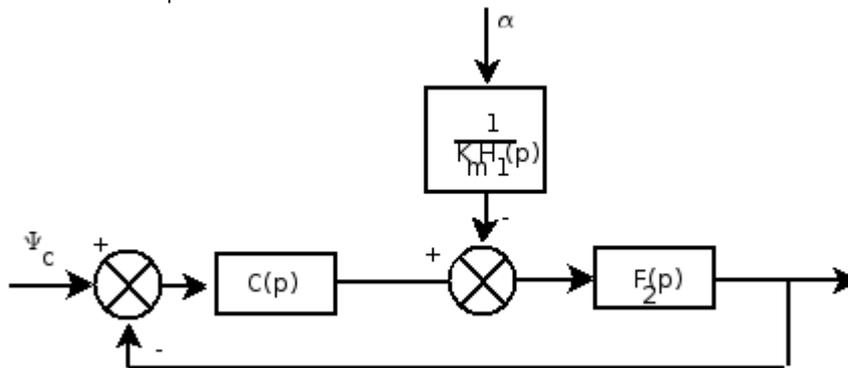
## V.B- Asservissement d'inclinaison du chariot

V.B.1) Compléter le schéma bloc de l'asservissement fourni sur le document réponse en faisant apparaître la régulation de l'inclinaison.



V.B.2) Calculer l'inclinaison  $\Psi(t)$  du châssis en régime permanent, lorsque la perturbation  $\alpha(t)$  est un échelon d'amplitude  $\alpha_0$ . Le cahier des charges est-il satisfait ?

Le schéma bloc peut se mettre sous la forme suivante :



On détermine alors :

$$\Psi(p) = - \frac{F_2(p)}{K_m H_1(p) (1 + F_2(p) K_c)} \alpha(p)$$

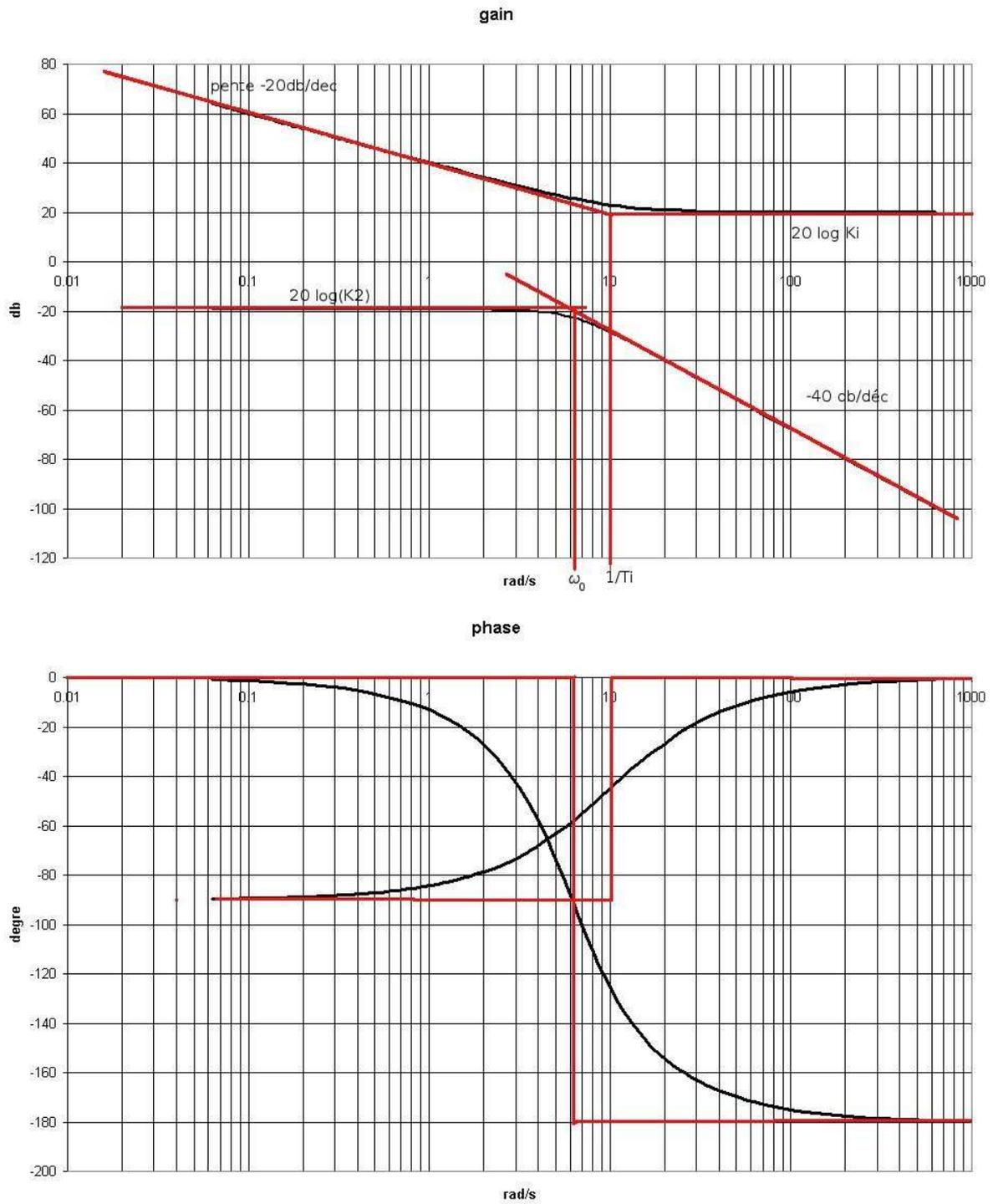
L'erreur (écart) en régime permanent s'obtient en appliquant le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Psi(p) = - \frac{K_2 \alpha_0}{K_s (1 + K_2 K_c)} \neq 0. \text{ Le cahier des charges n'est pas satisfait.}$$

V.B.3) Démontrer que ce correcteur permet de satisfaire le cahier des charges vis-à-vis de l'écart en régime permanent pour une perturbation en échelon.

Le correcteur intégral permet d'obtenir  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$  (reprendre les calculs de la question précédente en remplaçant l'expression de  $C(p)$  par sa nouvelle expression).

V.B.4) Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques et réels



tracé du correcteur PI pour  $K_i = 10, T_i = 0.1s$

V.B.5) Déterminer  $\omega_c$  telle que la marge de la FTBO(p) soit  $M_\phi = 45^\circ$ . En déduire la valeur de  $T_i$ .

$$M_\phi = \pi/4 = \pi + \arg(\text{FTBO}(j\omega_c)) = \pi - \pi/2 + \text{atan}(T_i\omega_c) + \arg(F_2(j\omega_c))$$

soit  $\arg(F_2(j\omega_c)) = -\pi/4 - \text{atan}(10) = -2,25 \text{ rad}$

$$\text{On en déduit } 1,22 = \frac{2\xi\omega_c / \omega_0}{1 - \omega_c^2 / \omega_0^2}$$

Après résolution de l'équation du second degré en  $\omega_c$ .

On obtient :  $\omega_c = 3.54 \text{ rad/s}$  et  $T_i = 2.82\text{s}$

V.B.6) Déterminer alors  $K_i$  tel que  $\omega_c$  soit effectivement la pulsation de coupure à de la FTBO corrigée.

$K_i$  doit vérifier

$$|FTBO(j\omega_c)| = 1 = K_i \cdot \frac{\sqrt{1 + T_i^2 \omega_c^2}}{T_i \omega_c} \cdot \frac{K_2}{\sqrt{(1 - \omega_c^2 / \omega_0^2)^2 + 4\xi^2 \omega_c^2 / \omega_0^2}}$$
$$K_i = \frac{10}{\sqrt{101}} \frac{\sqrt{(1 - (3.54 / 6.15)^2)^2 + 2(3.54 / 6.15)^2}}{0.1} \approx 10,48$$

V.C.1) Conclure quant au respect des critères de dépassement et de précision associés à la fonction de service FS2.

- La convergence de  $\psi(t)$  vers 0 lorsque  $t \rightarrow \infty$  est réalisée
- Le dépassement d'inclinaison est inférieur à 30% (de l'ordre de 15%)

Le cahier des charges est donc respecté.